From: Domenico Galli <domenico.galli@bo.infn.it>
Subject: **Esercizi A: d_cr_10 d_cr_16**
Date: February 5, 2010 08:10:35 GMT+01:00
To: Domenico Galli <domenico.galli.fisica-fo@studio.unibo.it>
Bcc:
Security: Signed (Domenico Galli)
2 Attachments, 63.3 KB

Egregi studenti,
trovate in allegato soluzioni agli esercizi in oggetto.

Saluti,
Domenico Galli

Prof. Domenico GALLI

Professore Associato di Fisica Sperimentale presso la Seconda Facoltà di Ingegneria

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna, Dipartimento di Fisica
via Irnerio, 46, I-40126 Bologna - ITALY
Phone: +39-051-20-91027 Fax: +39-051-3370039
e-mail: domenico.galli@unibo.it
web: http://www.unibo.it/docenti/domenico.galli
web: https://lhcbweb.bo.infn.it/GalliDidattica

INFN - Sezione di Bologna
e-mail: domenico.galli@bo.infn.it
web: http://www.bo.infn.it/~galli/

CERN, EP-ULB LHCB, 1-R-009, Route de Meyrin, CH-1211 Geneve 23, Switzerland
Phone: +41-22-76-73755
e-mail: domenico.galli@cern.ch

On Feb 3, 2010, at 17:25, a student wrote:

> salve professore!
> sono un studente di ingegneria a Forlì. Volevo chiederle se
> gentilmente può mandarmi le soluzioni degli esercizi d_cr_10 e d_cr_16.
>
> La ringrazio
> Cordiali saluti

Un carrello, dotato di 4 ruote, ha massa (escluse le ruote) pari a $M = 50\,\text{kg}$, mentre ogni ruota ha massa pari a $m = \left(0.2 + \frac{1}{5000}\,\xi\right) M$ e raggio $r = 50\,\text{cm}$. Il carrello è trainato mediante una fune, con una forza orizzontale $\vec{F}$ di intensità $F = 100\,\text{N}$. Trascurando gli attriti volventi e gli attriti radenti dinamici, e considerando le ruote come cilindri omogenei, calcolare l'accelerazione del carrello.

Accelerazione del carrello $\left[\text{m/s}^2\right]$:

Poiché il carrello ha 4 ruote che rotolano senza strisciare, per metterlo in movimento occorre anche mettere in rotazione le 4 ruote. L'accelerazione sarà perciò inferiore a quella di un identico carrello le cui ruote non ruotano ma strisciano senza attrito. Nel problema sono incognite non soltanto l'accelerazione $\vec{a}$, ma anche le reazioni vincolari $\vec{R}_n$ del suolo verso le 4 ruote (che sono uguali se il baricentro è equidistante dalle 4 ruote) e l'attrito radente statico $\vec{R}_t$ sulle 4 ruote. Risolviamo il problema mediante le due equazioni della dinamica del corpo rigido:

$$\begin{cases} \vec{\mathscr{R}}^{(e)} = M_{tot}\vec{a}_G \\ \mathscr{M}_u^{(e)} = I_u\dot{\omega} \end{cases}$$

Nel nostro caso si ha:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{p} + 4\vec{R}_n + 4\vec{R}_t = (M+4m)\,\vec{a}_G \\ R_t r = I_u \dot{\omega} \end{cases}$$

Prendendo le componenti orizzontali e verticali si ha:

$$\begin{cases} \begin{cases} F - 4R_t = (M+4m)\,a_G \\ 4R_n - p = 0 \end{cases} \\ R_t r = I_u \dot{\omega} = I_u \dfrac{a_G}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_t = I_u \dfrac{a_G}{r^2} \\ F - 4I_u \dfrac{a_G}{r^2} = (M+4m)\,a_G \\ R_n = \dfrac{p}{4} \end{cases}$$

$$F = \left(M + 4m + 4\frac{I_u}{r^2}\right) a_G$$

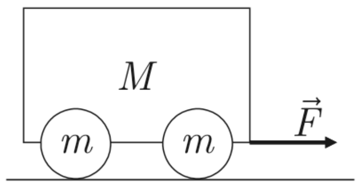
$$a_G = \frac{F}{M + 4m + 4\dfrac{I_u}{r^2}}$$

Il momento di inerzia delle ruote, considerate cilindriche, rispetto al proprio asse è:

$$I_u = \frac{1}{2} m r^2$$

per cui si ha:

$$a_G = \frac{F}{M + 4m + 4\dfrac{1}{r^2}\dfrac{1}{2}mr^2} = \frac{F}{M + 4m + 2m} = \frac{F}{M + 6m}$$



Una sfera omogenea è fatta rotolare lungo un piano inclinato in presenza di attrito radente. Determinare il massimo angolo di inclinazione del piano, $\theta_{\max}$, oltre il quale il moto non è più un moto di puro rotolamento, sapendo che il coefficiente di attrito statico è $f = 10^{-4}\xi$.

Massimo angolo di inclinazione $\theta_{\max}$ [°]:

La reazione vincolare $\vec{R}_n$ e la forza di attrito radente statico $\vec{R}_t^{(s)}$ non sono forze note a priori, ma sono determinabili soltanto risolvendo le equazioni del moto. Per la sfera in questione, l'equazione del moto del centro di massa e l'equazione della rotazione si scrivono:

$$\begin{cases} \vec{\mathscr{R}} = \vec{p} + \vec{R}_n + \vec{R}_t^{(s)} = m\vec{a}_G \\ \mathscr{M}^{(e)} = I\dot{\omega} \end{cases}$$

Prendendo come asse per il calcolo del momento assiale della forza e del momento di inerzia l'asse g passante per il centro G della sfera e parallelo alle isoipse e scomponendo la prima equazione nelle componenti perpendicolare e parallela al piano inclinato, si ha:

$$\begin{cases} \begin{array}{l} \perp \\ \parallel \end{array} \begin{cases} R_n - p\cos\theta = 0 \\ p\sin\theta - R_t^{(s)} = ma_G \end{cases} \\ \mathscr{M}_g^{(e)} = I_g \dot{\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} R_n = p\cos\theta \\ R_t^{(s)} + ma_G = p\sin\theta \end{cases} \\ R_t^{(s)} r = I_g \dfrac{a_G}{r} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} a_G = R_t^{(s)} \dfrac{r^2}{I_g} \\ R_n = p\cos\theta \\ R_t^{(s)} + m a_G = p\sin\theta \quad \Rightarrow \quad R_t^{(s)} + m R_t^{(s)} \dfrac{r^2}{I_g} = p\sin\theta \end{cases}$$

infine, considerando che $I_g = \frac{2}{5} m r^2$:

$$\begin{cases} R_n = p\cos\theta \\ R_t^{(s)} = \dfrac{p\sin\theta}{1 + \dfrac{mr^2}{I_g}} = \dfrac{p\sin\theta}{1 + \dfrac{mr^2}{\frac{2}{5}mr^2}} = \dfrac{p\sin\theta}{1 + \dfrac{5}{2}} = \dfrac{2}{7}\, p\sin\theta \end{cases}$$

Sappiamo che il modulo della forza di attrito radente statico $R_t^{(s)}$ può avere al massimo l'intensità $R_{t\,\max}^{(s)}$, proporzionale alla forza di appoggio R_n:

$$R_t^{(s)} < R_{t\,\max}^{(s)} = f R_n$$

dove la costante di proporzionalità f è detta "coefficiente di attrito statico". Se la forza di attrito radente statico $R_t^{(s)}$ necessaria per avere il rotolamento puro è superiore al valore massimo $R_{t\,\max}^{(s)}$, allora l'attrito radente diviene dinamico (si ha strisciamento) e dunque non si è più in condizioni di rotolamento puro.

La condizione limite del rotolamento puro (corrispondente al passaggio al rotolamento con strisciamento) si ha quando:

$$R_t^{(s)} = R_{t\,\max}^{(s)} = f\, R_n$$

$$\frac{2}{7}\, p\sin\theta_{\max} = f\, p\cos\theta_{\max}$$

$$\tan\theta_{\max} = \frac{7}{2}\, f$$

$$\boxed{\theta_{\max} = \arctan\left(\frac{7}{2}\, f\right)}$$